

KỲ THI TN THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2020-2021
MÔN TOÁN-THPT

Câu 1 Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x-4} = \frac{1}{16}$ là

A $\emptyset$.

B $\{2; 4\}$.

C $\{-2; 2\}$.

D $\{0; 1\}$.

Lời giải.

Câu 1 Tập nghiệm của phương trình $2^{x^2-x-4} = \frac{1}{16}$ là

A $\emptyset$.

B $\{2; 4\}$.

C $\{-2; 2\}$.

D $\{0; 1\}$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2^{x^2-x-4} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow 2^{x^2-x-4} = 2^{-4} \Leftrightarrow x^2 - x - 4 = -4 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1. \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{0; 1\}$.

Câu 2 Cho $\int_{-2}^2 f(x) \, dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(x) \, dx = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(x) \, dx$.

A $I = 5$.

B $I = -5$.

C $I = -3$.

D $I = 3$.

Lời giải.

Câu 2

Cho $\int_{-2}^2 f(x) dx = 1$, $\int_{-2}^4 f(x) dx = -4$. Tính $I = \int_2^4 f(x) dx$.

A $I = 5$.

B $I = -5$.

C $I = -3$.

D $I = 3$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_{-2}^4 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \Rightarrow \int_2^4 f(x) dx = -4 - 1 = -5.$$

Câu 3 Tính diện tích xung quanh S của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$.

A $S = 12\pi$.

B $S = 48\pi$.

C $S = 24\pi$.

D $S = 96\pi$.

Lời giải.

Câu 3 Tính diện tích xung quanh S của khối trụ có bán kính đáy $r = 4$ và chiều cao $h = 3$.

A $S = 12\pi$.

B $S = 48\pi$.

C $S = 24\pi$.

D $S = 96\pi$.

Lời giải.

Diện tích xung quanh S của khối trụ đó là $S = 2\pi rh = 2\pi \cdot 4 \cdot 3 = 24\pi$ (đvdt).

Câu 4 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ của điểm M là

- A** $M(2; 1; 0)$. **B** $M(2; 0; 1)$. **C** $M(0; 2; 1)$. **D** $M(1; 2; 0)$.

Lời giải.

Câu 4 Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M thỏa mãn hệ thức $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Tọa độ của điểm M là

A $M(2; 1; 0)$.

B $M(2; 0; 1)$.

C $M(0; 2; 1)$.

D $M(1; 2; 0)$.

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{OM} = 2\vec{i} + \vec{j} = 2 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} + 0 \cdot \vec{k} \Leftrightarrow M(2; 1; 0)$.

Câu 5 Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 2 - 3n$. Công sai d của cấp số cộng là

- A** $d = 3$. **B** $d = 2$. **C** $d = -3$. **D** $d = -2$.

Lời giải.

Câu 5 Cho cấp số cộng (u_n) biết $u_n = 2 - 3n$. Công sai d của cấp số cộng là

- A** $d = 3$. **B** $d = 2$. **C** $d = -3$. **D** $d = -2$.

Lời giải.

Ta có $u_{n+1} - u_n = [2 - 3(n + 1)] - (2 - 3n) = -3, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Vậy cấp số cộng (u_n) có công sai $d = -3$.

Câu 6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

A $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.

B $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.

C $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$.

D $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

Lời giải.

Câu 6 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 9$. Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của (S) .

A $I(-1; 2; 1)$ và $R = 3$.

B $I(1; -2; -1)$ và $R = 3$.

C $I(-1; 2; 1)$ và $R = 9$.

D $I(1; -2; -1)$ và $R = 9$.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(-1; 2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{9} = 3$.

Câu 7 Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A a^2 .

B $a^{\frac{7}{6}}$.

C a^3 .

D $a^{\frac{1}{6}}$.

Lời giải.

Câu 7

Cho a là một số dương, biểu thức $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a}$ viết dưới dạng lũy thừa với số mũ hữu tỉ là

A a^2 .

B $a^{\frac{7}{6}}$.

C a^3 .

D $a^{\frac{1}{6}}$.

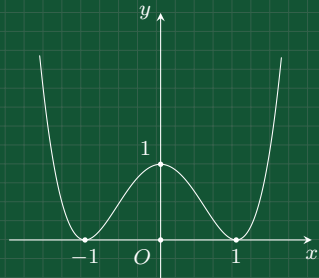
Lời giải.

Ta có $a^{\frac{2}{3}}\sqrt{a} = a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}} = a^{\frac{7}{6}}$.

Câu 8

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A** Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- B** Hàm số đồng biến trên $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- C** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
- D** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.

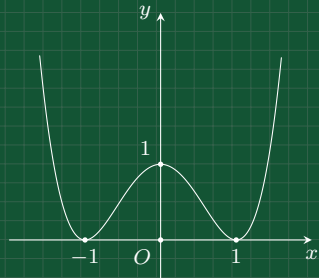


Lời giải.

Câu 8

Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?

- A** Hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.
- B** Hàm số đồng biến trên $(-1; 0) \cup (1; +\infty)$.
- C** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.
- D** Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(0; +\infty)$.



Lời giải.

Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên $(-1; 0)$ và $(1; +\infty)$.

Câu 9

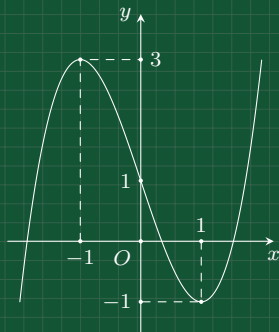
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

B $y = x^3 - 3x - 1.$

C $y = x^3 - 3x + 1.$

D $y = -x^3 - 3x^2 - 1.$



Lời giải.

Câu 9

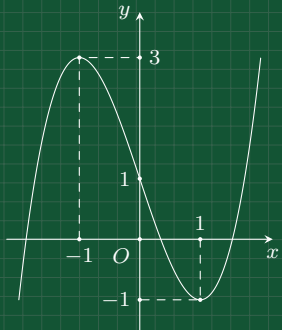
Đường cong trong hình vẽ bên là đồ thị của hàm số nào dưới đây?

A $y = -x^3 + 3x^2 + 1.$

B $y = x^3 - 3x - 1.$

C $y = x^3 - 3x + 1.$

D $y = -x^3 - 3x^2 - 1.$

**Lời giải.**

Từ đồ thị và các phương án, ta suy ra đây là đồ thị của hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$ nên $a > 0$.

Vì đồ thị cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 1 nên $d = 1$.

Vậy hàm số cần tìm là $y = x^3 - 3x + 1$.

Câu 10 Từ một nhóm có 10 học sinh nam và 8 học sinh nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ?

A $C_{10}^3 + C_8^2$.

B $C_{10}^3 \cdot C_8^2$.

C $A_{10}^3 \cdot A_8^2$.

D $A_{10}^3 + A_8^2$.

Lời giải.

Câu 10 Từ một nhóm có 10 học sinh nam và 8 học sinh nữ, có bao nhiêu cách chọn ra 5 học sinh trong đó có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ?

A $C_{10}^3 + C_8^2$.

B $C_{10}^3 \cdot C_8^2$.

C $A_{10}^3 \cdot A_8^2$.

D $A_{10}^3 + A_8^2$.

Lời giải.

Chọn 3 học sinh nam trong 10 học sinh nam có C_{10}^3 cách chọn.

Chọn 2 học sinh nữ trong 8 học sinh nữ có C_8^2 cách chọn.

Áp dụng quy tắc nhân, ta có số cách chọn 5 học sinh trong đó có 3 học sinh nam và 2 học sinh nữ là $C_{10}^3 \cdot C_8^2$.

Câu 11 Đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ lần lượt có phương trình là

A $y = 2, x = \frac{1}{2}.$

B $x = 2, y = 2.$

C $y = 2, x = 2.$

D $y = 2, x = -2.$

Lời giải.

Câu 11

Đường tiệm cận ngang, đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x - 1}{x - 2}$ lần lượt có phương trình là

A $y = 2, x = \frac{1}{2}.$

B $x = 2, y = 2.$

C $y = 2, x = 2.$

D $y = 2, x = -2.$

Lời giải.

Ta có

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 1}{x - 2} = 2; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 1}{x - 2} = 2$ nên đường thẳng $y = 2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.
- $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x - 1}{x - 2} = +\infty; \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - 1}{x - 2} = -\infty$ nên đường thẳng $x = 2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.

Vậy đường tiệm cận ngang và đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số lần lượt là $y = 2, x = 2$.

Câu 12

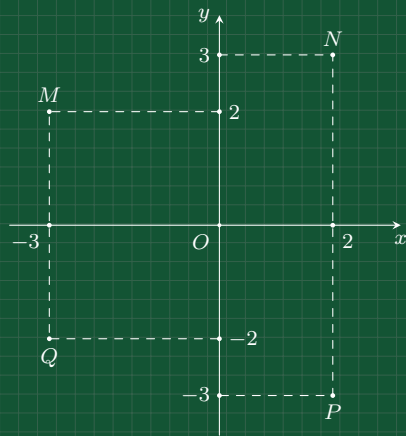
Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = -3i + 2$?

A M .

B N .

C Q .

D P .



Lời giải.

Câu 12

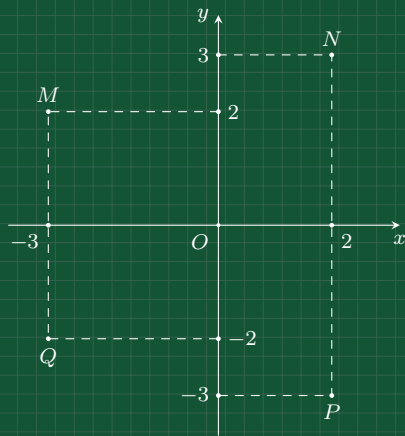
Điểm nào trong hình vẽ dưới đây là điểm biểu diễn số phức liên hợp của số phức $z = -3i + 2$?

A M .

B N .

C Q .

D P .



Lời giải.

Số phức liên hợp của $z = -3i + 2$ là $\bar{z} = 2 + 3i$.
Suy ra điểm biểu diễn của $\bar{z}$ là $N(2; 3)$.

Câu 13 Đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + 2)$ là

A $\frac{1}{x^2 + 2}.$

B $\frac{2x}{x^2 + 2}.$

C $\frac{x}{x^2 + 2}.$

D $\frac{2x + 2}{x^2 + 2}.$

Lời giải.

Câu 13 Đạo hàm của hàm số $y = \ln(x^2 + 2)$ là

A $\frac{1}{x^2 + 2}.$

B $\frac{2x}{x^2 + 2}.$

C $\frac{x}{x^2 + 2}.$

D $\frac{2x + 2}{x^2 + 2}.$

Lời giải.

Ta có $y' = \frac{(x^2 + 2)'}{x^2 + 2} = \frac{2x}{x^2 + 2}.$

Câu 14 Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A $\int (3^x - e^{-x}) \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + e^{-x} + C.$

C $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C.$

B $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C.$

D $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

Lời giải.

Câu 14 Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A $\int (3^x - e^{-x}) \, dx = \frac{3^x}{\ln 3} + e^{-x} + C.$

B $\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C.$

C $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C.$

D $\int \sin x \, dx = -\cos x + C.$

Lời giải.

Ta có $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C.$

Vậy mệnh đề “ $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$ ” là sai.

Câu 15 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào trong 4 phương án dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{3y}{2} = \frac{3-z}{1}$.

A $\vec{a} = \left(3; \frac{3}{2}; 1\right)$.

B $\vec{a} = (9; 2; -3)$.

C $\vec{a} = (3; 2; 1)$.

D $\vec{a} = \left(3; \frac{2}{3}; 1\right)$.

Lời giải.

Câu 15 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, véc-tơ nào trong 4 phương án dưới đây là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng có phương trình $\frac{x-1}{3} = \frac{3y}{2} = \frac{3-z}{1}$.

A $\vec{a} = \left(3; \frac{3}{2}; 1\right)$.

B $\vec{a} = (9; 2; -3)$.

C $\vec{a} = (3; 2; 1)$.

D $\vec{a} = \left(3; \frac{2}{3}; 1\right)$.

Lời giải.

Ta có $\frac{x-1}{3} = \frac{3y}{2} = \frac{3-z}{1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{3} = \frac{y}{\frac{2}{3}} = \frac{z-3}{-1}$.

Suy ra đường thẳng trên có một véc-tơ chỉ phương là $\vec{b} = \left(3; \frac{2}{3}; -1\right)$.

Suy ra $\vec{a} = 3\vec{b} = (9; 2; -3)$ cũng là một véc-tơ chỉ phương của đường thẳng đã cho.

Câu 16 Khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$, góc giữa đường sinh và đáy bằng 60° . Thể tích khối nón đã cho là

A $V = \frac{\pi a^3}{3}.$

B $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}.$

C $V = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}.$

D $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}.$

Lời giải.

Câu 16 Khối nón có độ dài đường sinh bằng $2a$, góc giữa đường sinh và đáy bằng 60° . Thể tích khối nón đã cho là

A $V = \frac{\pi a^3}{3}$.

B $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{2}}{3}$.

C $V = \frac{\pi a^3}{3\sqrt{3}}$.

D $V = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{3}$.

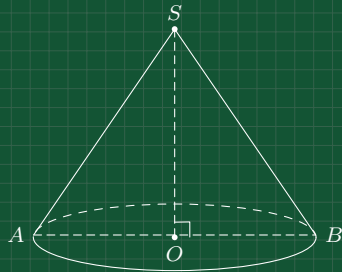
Lời giải.

Gọi SAB là thiết diện qua trục của hình nón.

Ta có $\triangle SAB$ đều có cạnh $2a$ nên chiều cao $SO = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Bán kính đáy $r = \frac{AB}{2} = a$.

Vậy thể tích khối nón là $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot SO = \frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{3}$.



Câu 17

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A -2 .

B 2.

C 1.

D -1 .

Lời giải.

Câu 17

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

A -2 .

B 2.

C 1.

D -1 .

Lời giải.

Dựa vào bảng biến thiên ta có giá trị cực tiểu của hàm số đã cho là $y_{CT} = -2$.

Câu 18 Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A** Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.
- B** Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = 3Bh$.
- C** Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Bh$.
- D** Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.

Lời giải.

Câu 18 Khẳng định nào sau đây là **sai**?

- A** Thể tích của một khối hộp chữ nhật bằng tích ba kích thước của nó.
- B** Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = 3Bh$.
- C** Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Bh$.
- D** Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = Bh$.

Lời giải.

Thể tích của khối chóp có diện tích đáy là B và chiều cao h là $V = \frac{1}{3}Bh$.

Suy ra phát biểu “Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là $V = 3Bh$ ” là sai.

Câu 19 Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Số phức $2z_1 + 3z_2 - z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

- A** $-10i$. **B** $11 + 8i$. **C** $11 - 10i$. **D** $10i$.

Lời giải.

Câu 19 Cho hai số phức $z_1 = 1 + 2i$ và $z_2 = 3 - 4i$. Số phức $2z_1 + 3z_2 - z_1z_2$ là số phức nào sau đây?

A $-10i$.

B $11 + 8i$.

C $11 - 10i$.

D $10i$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } 2z_1 + 3z_2 - z_1z_2 = 2(1 + 2i) + 3(3 - 4i) - (1 + 2i)(3 - 4i) = -10i.$$

Câu 20

Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A $M(1; 0; 0)$.

B $Q(0; 0; 3)$.

C $P(0; 2; 0)$.

D $N(1; 2; 3)$.

Lời giải.

Câu 20 Trong không gian $Oxyz$, mặt phẳng (P) : $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ không đi qua điểm nào dưới đây?

A $M(1; 0; 0)$.

B $Q(0; 0; 3)$.

C $P(0; 2; 0)$.

D $N(1; 2; 3)$.

Lời giải.

Thay tọa độ điểm $N(1; 2; 3)$ vào phương trình mặt phẳng (P) ta có $\frac{1}{1} + \frac{2}{2} + \frac{3}{3} = 1$ (Vô lý).

Vậy mặt phẳng (P) không đi qua điểm $N(1; 2; 3)$.

Câu 21 Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp chứa 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Xác suất để chọn được 2 viên bi xanh là

A $\frac{3}{25}$.

B $\frac{2}{5}$.

C $\frac{3}{10}$.

D $\frac{7}{10}$.

Lời giải.

Câu 21 Chọn ngẫu nhiên 2 viên bi từ một hộp chứa 2 viên bi đỏ và 3 viên bi xanh. Xác suất để chọn được 2 viên bi xanh là

A $\frac{3}{25}$.

B $\frac{2}{5}$.

C $\frac{3}{10}$.

D $\frac{7}{10}$.

Lời giải.

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_5^2 = 10$.

Gọi A là biến cố “Chọn được hai viên bi xanh”.

Ta có $n(A) = C_3^2 = 3$ cách.

$$\text{Vậy } P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{3}{10}.$$

Câu 22 Gọi P là tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 (x^3 + x + 1) = \log_2 (2x^2 + 1)$. Tính P .

- A** $P = 1$. **B** $P = 3$. **C** $P = 6$. **D** $P = 0$.

Lời giải.

Câu 22 Gọi P là tích tất cả các nghiệm của phương trình $\log_2 (x^3 + x + 1) = \log_2 (2x^2 + 1)$. Tính P .

A $P = 1$.

B $P = 3$.

C $P = 6$.

D $P = 0$.

Lời giải.

Điều kiện $x^3 + x + 1 > 0$.

$$\begin{aligned} \log_2 (x^3 + x + 1) &= \log_2 (2x^2 + 1) \\ \Leftrightarrow x^3 + x + 1 &= 2x^2 + 1 \\ \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Kiểm tra với điều kiện thấy hai nghiệm đều thỏa.

Vậy tích hai nghiệm là $P = 0$.

Câu 23 Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

A $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}.$

B $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}.$

C $-\cot x + x^2 - 1.$

D $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}.$

Lời giải.

Câu 23

Nguyên hàm $F(x)$ của hàm số $f(x) = 2x + \frac{1}{\sin^2 x}$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$ là

A $-\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}.$

B $\cot x - x^2 + \frac{\pi^2}{16}.$

C $-\cot x + x^2 - 1.$

D $\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}.$

Lời giải.

Ta có $F(x) = \int \left(2x + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx = x^2 - \cot x + C.$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{4}\right)^2 - \cot \frac{\pi}{4} + C = -1 \Leftrightarrow C = -\frac{\pi^2}{16}.$$

Vậy $F(x) = -\cot x + x^2 - \frac{\pi^2}{16}$

Câu 24 Cho các số thực a, b thỏa mãn $i[2(a - 5) - 7i] = b + (a + 3)i$ với i là đơn vị ảo. Tính $a - b$.

- A** 6. **B** 3. **C** 2. **D** 12.

Lời giải.

Câu 24

Cho các số thực a, b thỏa mãn $i[2(a - 5) - 7i] = b + (a + 3)i$ với i là đơn vị ảo. Tính $a - b$.

A

6.

B

3.

C

2.

D

12.

Lời giải.

Ta có

$$i[2(a - 5) - 7i] = b + (a + 3)i \Leftrightarrow 7 + 2(a - 5)i = b + (a + 3)i \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ 2(a - 5) = a + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 7 \\ a = 13. \end{cases}$$

Vậy $a - b = 13 - 7 = 6$.

Câu 25

Cho $\int_1^2 f(x) \, dx = 100$. Khi đó $\int_1^3 [3f(x) + 4] \, dx$ bằng

A 304.

B 700.

C 296.

D 300.

Lời giải.

Câu 25

Cho $\int_1^2 f(x) \, dx = 100$. Khi đó $\int_1^3 [3f(x) + 4] \, dx$ bằng

A 304.

B 700.

C 296.

D 300.

Lời giải.

$$\text{Ta có } \int_1^2 [3f(x) + 4] \, dx = 3 \int_1^2 f(x) \, dx + 4 \int_1^2 1 \, dx = 300 + 4x \Big|_1^2 = 300 + (4 \cdot 2 - 4) = 304.$$

Câu 26 Tìm số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z - (9 - 2i) = (1 + i)z$.

A $-1 - 2i$.

B $1 - 2i$.

C $\frac{13}{5} + \frac{16}{5}i$.

D $1 + 2i$.

Lời giải.

Câu 26 Tìm số phức z thỏa mãn $(2 - 3i)z - (9 - 2i) = (1 + i)z$.

A $-1 - 2i$.

B $1 - 2i$.

C $\frac{13}{5} + \frac{16}{5}i$.

D $1 + 2i$.

Lời giải.

$$\text{Ta có } (2 - 3i)z - (9 - 2i) = (1 + i)z \Leftrightarrow (2 - 3i)z - (1 + i)z = 9 - 2i \Leftrightarrow (1 - 4i)z = 9 - 2i.$$

$$\Leftrightarrow z = \frac{9 - 2i}{1 - 4i} \Leftrightarrow z = \frac{(9 - 2i)(1 + 4i)}{(1 - 4i)(1 + 4i)} \Leftrightarrow z = \frac{17 + 34i}{17} \Leftrightarrow z = 1 + 2i$$

Câu 27

Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $2^{3x+3} \leq 2^{2019-7x}$

A 200.

B 100.

C 102.

D 201.

Lời giải.

Câu 27

Tìm số nghiệm nguyên dương của bất phương trình $2^{3x+3} \leq 2^{2019-7x}$

- A** 200. **B** 100. **C** 102. **D** 201.

Lời giải.

Ta có $2^{3x+3} \leq 2^{2019-7x} \Leftrightarrow 3x + 3 \leq 2019 - 7x \Leftrightarrow 10x \leq 2016 \Leftrightarrow x \leq 201,6$.

Mà $x \in \mathbb{Z}^+$ nên $x \in \{1; 2; 3; \dots; 201\}$.

Vậy bất phương trình có 201 nghiệm nguyên dương.

Câu 28

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCD'A')$ và $(ABCD)$ bằng

A 60° .

B 30° .

C 90° .

D 45° .

Lời giải.

Câu 28

Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$. Góc giữa hai mặt phẳng $(BCD'A')$ và $(ABCD)$ bằng

A 60° .

B 30° .

C 90° .

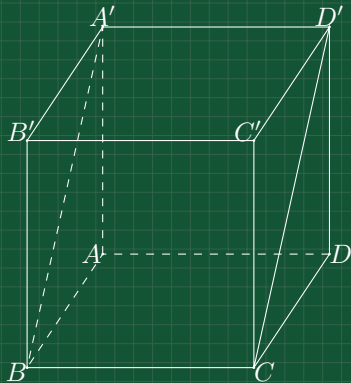
D 45° .

Lời giải.

Ta có:
$$\begin{cases} (ABCD) \cap (BCD'A') = BC \\ BC \perp DC \\ BC \perp D'C \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Góc giữa $(BCD'A')$ và $(ABCD)$ chính là góc $\widehat{DCD'}$.

Vì $DCC'D'$ là hình vuông nên $\widehat{DCD'} = 45^\circ$.



Câu 29 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

C $a^3\sqrt{3}$.

D $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Câu 29 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Mặt bên SAB là tam giác đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy $(ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

A $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$.

B $\frac{a^3\sqrt{3}}{4}$.

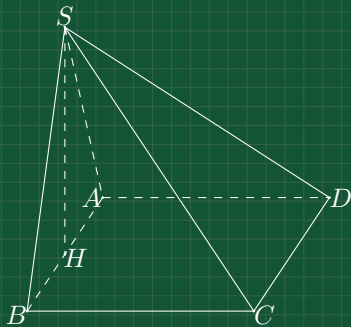
C $a^3\sqrt{3}$.

D $\frac{a^3\sqrt{3}}{6}$.

Lời giải.

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow SH \perp (ABCD)$. Thể tích khối chóp $S.ABCD$ là:

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABCD} \cdot SH = \frac{1}{3}a^2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3\sqrt{3}}{6}.$$



Câu 30 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)^2 (x - 1) x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A 2.

B 1.

C 3.

D 0.

Lời giải.

Câu 30 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x) = (x - 2)^2 (x - 1) x^3, \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực tiểu của hàm số đã cho là

A 2.

B 1.

C 3.

D 0.

Lời giải.

$$\text{Ta có } f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 (x - 1) x^3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 0 \end{cases}$$

Bảng xét dấu y'

Từ bảng xét dấu y' ta thấy hàm số có một điểm cực tiểu là $x = 1$.

Câu 31 Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $\log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}.$

B $\log_2 \left(\frac{x^2}{y} \right) = 2 \log_2 x - \log_2 y.$

C $\log_2 (xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y.$

D $\log_2 (x + y) = \log_2 x + \log_2 y.$

Lời giải.

Câu 31

Với các số thực x, y dương bất kì. Mệnh đề nào dưới đây đúng ?

A $\log_2 \left(\frac{x}{y} \right) = \frac{\log_2 x}{\log_2 y}.$

B $\log_2 \left(\frac{x^2}{y} \right) = 2 \log_2 x - \log_2 y.$

C $\log_2 (xy) = \log_2 x \cdot \log_2 y.$

D $\log_2 (x + y) = \log_2 x + \log_2 y.$

Lời giải.

.

Câu 32

Tìm các số thực a, b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

- A** $a = -3, b = 1.$ **B** $a = 3, b = -1.$ **C** $a = -3, b = -1.$ **D** $a = 3, b = 1.$

Lời giải.

Câu 32

Tìm các số thực a, b thỏa mãn $(a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi$ với i là đơn vị ảo.

A $a = -3, b = 1.$

B $a = 3, b = -1.$

C $a = -3, b = -1.$

D $a = 3, b = 1.$

Lời giải.

$$\text{Ta có: } (a - 2b) + (a + b + 4)i = (2a + b) + 2bi \Leftrightarrow \begin{cases} a - 2b = 2a + b \\ a + b + 4 = 2b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + 3b = 0 \\ a - b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1. \end{cases}$$

Câu 33 Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

B
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

D
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Câu 33

Trong không gian $Oxyz$, đường thẳng Oy có phương trình tham số là

A
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

B
$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

C
$$\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

D
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Lời giải.

Đường thẳng Oy đi qua điểm $A(0; 2; 0)$ và nhận vectơ đơn vị $\vec{j} = (0; 1; 0)$ làm vectơ chỉ phương nên có

phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 0 + 0.t \\ y = 2 + 1.t \\ z = 0 + 0.t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 + t \\ z = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Câu 34 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5.$

B $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29.$

C $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5.$

D $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25.$

Lời giải.

Câu 34 Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $I(1; 1; 1)$ và $A(1; 2; 3)$. Phương trình của mặt cầu có tâm I và đi qua A là

A $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 5.$

B $(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z + 1)^2 = 29.$

C $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5.$

D $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 25.$

Lời giải.

Bán kính của mặt cầu: $r = IA = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}.$

Phương trình mặt cầu: $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 5.$

Câu 35 Cho hàm số $y = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x + 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A** Hàm số đạt cực trị tại $x = 1$. **B** Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- C** Hàm số có giá trị cực tiểu là $y = \frac{2}{\ln 2} + 1$. **D** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

Câu 35

Cho hàm số $y = \frac{2^x}{\ln 2} - 2x + 3$. Mệnh đề nào sau đây sai?

- A** Hàm số đạt cực trị tại $x = 1$. **B** Hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.
- C** Hàm số có giá trị cực tiểu là $y = \frac{2}{\ln 2} + 1$. **D** Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 0)$.

Lời giải.

$y' = 2^x - 2, \forall x \in (0; 1)$ thì $y' < 0$ nên hàm số nghịch biến trên $(0; 1)$.

Câu 36

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 3$.

A

2.

B

3.

C

1.

D

0.

Lời giải.

Câu 36

Tìm số giao điểm của đồ thị hàm số $y = x^3 - 3x + 3$ và đường thẳng $y = 3$.

A

2.

B

3.

C

1.

D

0.

Lời giải.

Số giao điểm là số nghiệm phương trình

$$x^3 - 3x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{3} \end{cases}$$

Phương trình có 3 nghiệm suy ra có 3 giao điểm.

Câu 37 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là

A 6 và -12 .

B 6 và -13 .

C 5 và -13 .

D 6 và -31 .

Lời giải.

Câu 37

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = -2x^4 + 4x^2 + 3$ trên đoạn $[0; 2]$ lần lượt là

A 6 và -12 .

B 6 và -13 .

C 5 và -13 .

D 6 và -31 .

Lời giải.

Ta có $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = -8x^3 + 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \\ x = 1 \Rightarrow f(1) = 5 \text{ và } f(2) = -13 \\ x = -1 \text{ (loại)}. \end{cases}$$

Vậy $\max_{[0;2]} f(x) = 5$ và $\min_{[0;2]} f(x) = -13$.

Câu 38 Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh bên $SA = 2\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng SCD .

A $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

B $d = a\sqrt{3}$.

C $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D $d = a$.

Lời giải.

Câu 38

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh a . Cạnh bên $SA = 2\sqrt{2}$ và vuông góc với đáy $ABCD$. Tính khoảng cách d từ điểm B đến mặt phẳng SCD .

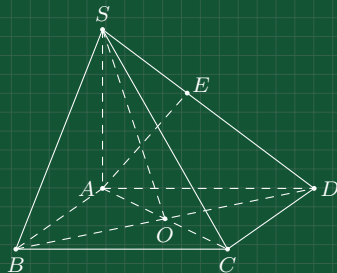
A $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

B $d = a\sqrt{3}$.

C $d = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D $d = a$.

Lời giải.



Do $AB \parallel CD$ nên $d(B, (SCD)) = d(A, (SCD))$. Kẻ $AE \perp SD$ tại E . Khi đó $d(A, (SCD)) = AE$.

Tam giác vuông SAD , có $AE = \frac{SA \cdot AD}{\sqrt{SA^2 + AD^2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Vậy $d(B, (SCD)) = AE = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Câu 39

Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2\cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx$ bằng

A $\frac{\pi^2 + 2}{8}.$

B $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}.$

C $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}.$

D $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}.$

Lời giải.

Câu 39

Cho hàm số $f(x)$. Biết $f(0) = 4$ và $f'(x) = 2 \cos^2 x + 3, \forall x \in \mathbb{R}$. Khi đó $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$ bằng

A $\frac{\pi^2 + 2}{8}.$

B $\frac{\pi^2 + 8\pi + 8}{8}.$

C $\frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}.$

D $\frac{\pi^2 + 6\pi + 8}{8}.$

Lời giải.

$$\text{Ta có } f(x) = \int f'(x) dx = \int (2 \cos^2 x + 3) dx = \int \left(2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + 3 \right) dx = \int (\cos 2x + 4) dx = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + C.$$

$$\text{Do } f(0) = 4 \Rightarrow C = 4.$$

$$\text{Vậy } f(x) = \frac{1}{2} \sin 2x + 4x + 4 \text{ nên}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{2} \sin 2x + 4x + 4 \right) dx = \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + 2x^2 + 4x \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2 + 8\pi + 2}{8}.$$

Câu 40 Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) . Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\frac{9}{4}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B . Giá trị của $(x_1 + x_2)^2$ bằng

A 5.

B 13.

C 11.

D 7.

Lời giải.

Câu 40

Cho hàm số $y = \frac{1}{2}x^2$ có đồ thị (P) . Xét các điểm A, B thuộc (P) sao cho tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB bằng $\frac{9}{4}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ của A và B . Giá trị của $(x_1 + x_2)^2$ bằng

A

5.

B

13.

C

11.

D

7.

Lời giải.

Giả sử phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b$.

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của P và AB : $\frac{1}{2}x^2 = ax + b \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 - ax - b = 0 \quad (*)$.

Theo đề bài ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của $(*)$ nên $\frac{1}{2}x^2 - ax - b = \frac{1}{2}(x - x_1)(x - x_2)$.

Giả sử ta có diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P) và đường thẳng AB là

$$S = \int_{x_1}^{x_2} \left(ax + b - \frac{1}{2}x^2 \right) dx = -\frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} (x - x_1)(x - x_2) dx = \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{(x_1 - x_2)^3}{12} = \frac{9}{4} \Rightarrow x_1 - x_2 = -3 \quad (1).$$

Ta lại có tiếp tuyến tại A và B vuông góc với nhau nên $x_1 \cdot x_2 = -1 \quad (2)$.

Từ (1) và (2) suy ra $(x_1 + x_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + 4x_1 \cdot x_2 = 9 - 4 = 5$.

Câu 41

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\int_0^1 xf(3x) \, dx = 1$. Khi đó

$\int_0^3 x^2 f'(x) \, dx$ bằng

A -9 .

B $\frac{25}{3}$.

C 3 .

D 7 .

Lời giải.

Câu 41

Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết $f(3) = 1$ và $\int_0^1 xf(3x) dx = 1$. Khi đó

$$\int_0^3 x^2 f'(x) dx \text{ bằng}$$

A -9 .

B $\frac{25}{3}$.

C 3 .

D 7 .

Lời giải.

$$\text{Đặt } t = 3x \Rightarrow dt = 3dx \Rightarrow dx = \frac{1}{3}dt.$$

$$\text{Suy ra } 1 = \int_0^1 xf(3x) dx = \frac{1}{9} \int_0^3 tf(t) dt \Leftrightarrow \int_0^3 tf(t) dt = 9.$$

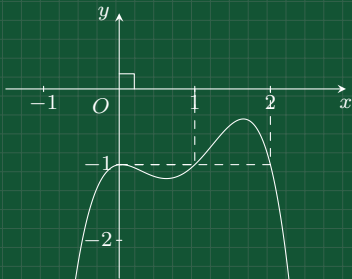
$$\text{Đặt } \begin{cases} u = f(t) \\ dv = tdt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = f'(t)dt \\ v = \frac{t^2}{2}. \end{cases}$$

$$\int_0^1 xf(3x) dx = \int_0^3 tf(t) dt = \left. \frac{t^2}{2} f(t) \right|_0^3 - \int_0^3 \frac{t^2}{2} f'(t) dt = \frac{9}{2} f(3) - \frac{1}{2} \int_0^3 t^2 f'(t) dt$$

$$\Leftrightarrow 9 = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} \int_0^3 t^2 f'(t) dt \Leftrightarrow \int_0^3 t^2 f'(t) dt = -9.$$

$$\text{Vậy } \int_0^3 x^2 f'(x) dx = -9.$$

Câu 42 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.

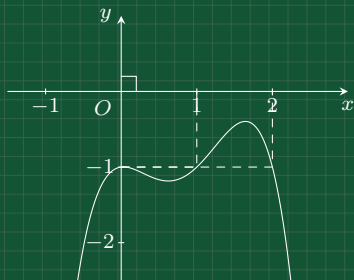


Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm

- A** $x = 0$. **B** $x = 2$.
C Không có điểm cực tiểu. **D** $x = 1$.

Lời giải.

Câu 42 Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$. Biết hàm số $y = f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Hàm số $g(x) = f(x) + x$ đạt cực tiểu tại điểm

- A** $x = 0$.
 B $x = 2$.
 C Không có điểm cực tiểu.
 D $x = 1$.

Lời giải.

Xét hàm số $g(x) = f(x) + x$ có $g'(x) = f'(x) + 1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f'(x)$ có: $g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x) = -1 \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$	Bảng biến thiên
--	-----------------

x	$-\infty$	0		1	2		$+\infty$	
y'		-	0	-	0	+	0	-
y								

Từ đó suy ra hàm số $y = g(x)$ đạt cực tiểu tại điểm $x = 1$.

Câu 43

Thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = a$, $AD = 2a$, $AC' = a\sqrt{14}$ là

A $V = 2a^3$.

B $V = a^3\sqrt{5}$.

C $V = 6a^3$.

D $V = \frac{a^3\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải.

Câu 43 Thể tích V của khối hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ biết $AB = a$, $AD = 2a$, $AC' = a\sqrt{14}$ là

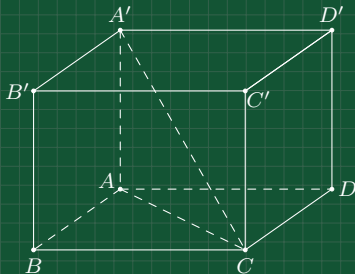
A $V = 2a^3$.

B $V = a^3\sqrt{5}$.

C $V = 6a^3$.

D $V = \frac{a^3\sqrt{14}}{3}$.

Lời giải.



Xét hình chữ nhật $ABCD$, ta có $AC^2 = AB^2 + AD^2 = a^2 + 4a^2 = 5a^2$.

Xét tam giác vuông $AA'C$, ta có $AA'^2 = AC'^2 - AC^2 = 14a^2 - 5a^2 = 9a^2 \Rightarrow AA' = 3a$.

Ta có $V_{ABCD.A'B'C'D'} = AB \cdot AD \cdot AA' = a \cdot 2a \cdot 3a = 6a^3$.

Câu 44 Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5}$ và $d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1}$ có phương trình

A $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}.$

B $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$

C $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}.$

D $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$

Lời giải.

Câu 44

Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+4}{-5} \text{ và } d_2: \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-4}{-1} \text{ có phương trình}$$

A $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}.$

B $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$

C $\frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-3}{2}.$

D $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{-1}.$

Lời giải.

Giả sử AB là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng d_1 và d_2 với $A \in d_1$ và $B \in d_2$.

Ta có $A \in d_1 \Rightarrow A(2+2a; 3+3a; -4-5a)$ và $B \in d_2 \Rightarrow B(-1+3b; 4-2b; 4-b)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3+3b-2a; 1-2b-3a; 8-b+5a)$.

Đường thẳng d_1 có một VTCP $\vec{u}_1 = (2; 3; -5)$; d_2 có một VTCP $\vec{u}_2 = (3; -2; -1)$.

Vì AB là đoạn vuông góc chung của d_1 và d_2 nên ta có

$$\begin{cases} AB \perp d_1 \\ AB \perp d_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(-3+3b-2a) + 3(1-2b-3a) - 5(8-b+5a) = 0 \\ 3(-3+3b-2a) - 2(1-2b-3a) - 1(8-b+5a) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -38a + 5b = 43 \\ -5a + 14b = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1. \end{cases}$$

Do đó $A(0; 0; 1)$ và $\overrightarrow{AB} = (2; 2; 2)$ là một VTCP của AB , suy ra AB cũng có một VTCP $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1)$.

Đường thẳng AB có phương trình chính tắc là $\frac{x}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}.$

Câu 45 Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$ có nghiệm là

A 8.

B 1.

C 6.

D 4.

Lời giải.

Câu 45 Số giá trị nguyên dương của tham số m để bất phương trình $9^{\sqrt{x^2-3x+m}} + 2 \cdot 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-2+x} < 3^{2x-3}$ có nghiệm là

- (A) 8. (B) 1. (C) 6. (D) 4.

Lời giải.

Đặt $t = 3^{\sqrt{x^2-3x+m}-x}$ với $t > 0$.

Bất phương trình đã cho trở thành $t^2 + \frac{2}{9}t - \frac{1}{27} < 0 \Leftrightarrow -3 < t < \frac{1}{9}$.

Do đó $0 < t < \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} - x < -2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-3x+m} < x-2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x^2 - 3x + m < x^2 - 4x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 3x + m \geq 0 \\ x < 4 - m \end{cases} \quad (I)$$

Để bất phương trình đề bài có nghiệm thì hệ bất phương trình (I) có nghiệm ta đặt

$$\begin{cases} x > 2 & (1) \\ x^2 - 3x + m \geq 0 & (2) \\ x < 4 - m & (3) \end{cases}$$

Điều kiện cần: Từ (1) và (3) ta có $4 - m > 2 \Leftrightarrow m < 2$. Do m là số nguyên dương nên $m = 1$.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$, hệ bất phương trình (I) trở thành

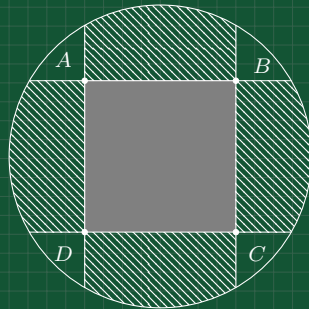
$$\begin{cases} x > 2 \\ x^2 - 3x + 1 \geq 0 \\ x < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < x < 3 \\ x < \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3+\sqrt{5}}{2} < x < 3.$$

$\Rightarrow$ hệ bất phương trình (I) có nghiệm.

Vậy $m = 1$.

Câu 46

Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa, phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ. Ở 4 góc còn lại mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB = 4\text{ m}$, giá trồng hoa là 200.000 đ/m^2 , giá trồng cỏ là 100.000 đ/m^2 , mỗi cây cọ giá 150.000 đ . Hỏi cần bao nhiêu tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa đó (tham khảo hình bên)

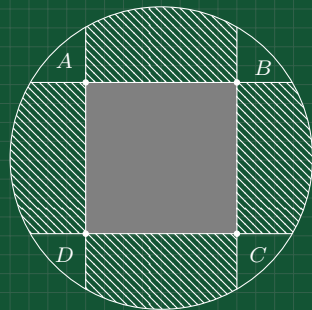


- A** 14.465.000 đồng.
- B** 14.865.000 đồng.
- C** 13.265.000 đồng.
- D** 12.218.000 đồng.

Lời giải.

Câu 46

Bồn hoa của một trường X có dạng hình tròn bán kính bằng $8m$. Người ta chia bồn hoa thành các phần như hình vẽ dưới đây và có ý định trồng hoa như sau: Phần diện tích bên trong hình vuông $ABCD$ để trồng hoa, phần diện tích kéo dài từ 4 cạnh của hình vuông đến đường tròn dùng để trồng cỏ. Ở 4 góc còn lại mỗi góc trồng một cây cọ. Biết $AB = 4m$, giá trồng hoa là 200.000 đ/m^2 , giá trồng cỏ là 100.000 đ/m^2 , mỗi cây cọ giá 150.000 đ . Hỏi cần bao nhiêu tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa đó (tham khảo hình bên)



- A** 14.465.000 đồng.
- B** 14.865.000 đồng.
- C** 13.265.000 đồng.
- D** 12.218.000 đồng.

Lời giải.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho gốc tọa độ trùng với tâm hình tròn, suy ra phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 = 64$.

+ Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = 4 \times 4 = 16 \text{ (m}^2\text{)}$

$\Rightarrow$ Số tiền để trồng hoa là: $T_1 = 16 \times 200.000 = 3.200.000$.

+ Diện tích trồng cỏ là: $S = 4 \int_{-2}^2 (\sqrt{64 - x^2} - 2) \, dx \approx 94,654 \text{ (m}^2\text{)}$

$\Rightarrow$ Số tiền trồng cỏ là: $T_2 = 94,654 \times 100.000 = 9.465.000$.

+ Số tiền trồng 4 cây cọ là: $T_3 = 150.000 \times 4 = 600.000$.

Vậy tổng số tiền để thực hiện việc trang trí bồn hoa là: $T = T_1 + T_2 + T_3 = 13.265.000$.

Câu 47 Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A $2 + 2\sqrt{3}$.

B $4\sqrt{3}$.

C 4.

D 8.

Lời giải.

Câu 47 Cho z_1, z_2 là hai trong các số phức thỏa mãn $|z - 3 + \sqrt{3}i| = 2$ và $|z_1 - z_2| = 4$. Giá trị lớn nhất của $|z_1| + |z_2|$ bằng

A $2 + 2\sqrt{3}$.

B $4\sqrt{3}$.

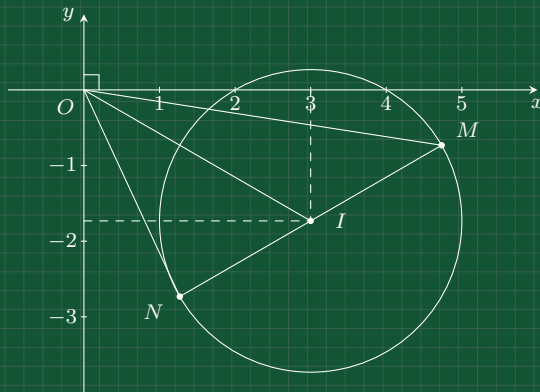
C 4.

D 8.

Lời giải.

Gọi M, N lần lượt là điểm biểu diễn của hai số phức z_1, z_2 .

$$\text{Do } \begin{cases} |z_1 - 3 + \sqrt{3}i| = |z_2 - 3 + \sqrt{3}i| = 2 \\ |z_1 - z_2| = 4 \end{cases} \text{ nên } \begin{cases} M, N \in (C): (x-3)^2 + (y+\sqrt{3})^2 = 2^2 \\ MN = 4 = 2 \cdot 2. \end{cases}$$



Như vậy MN là đường kính của đường tròn (C) với tâm $I(3; -\sqrt{3})$, bán kính $R = 2$, do đó I là trung điểm MN , $OI = \sqrt{12}$.

$$\text{Ta có } |z_1| + |z_2| = OM + ON \leq \sqrt{(1+1)(OM^2 + ON^2)} = \sqrt{2 \left(2OI^2 + \frac{MN^2}{2} \right)} = 8.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi và chỉ khi $OM = ON \Leftrightarrow MN$ là đường kính của (C) vuông góc với OI .

Câu 48 Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón có đỉnh I thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 7 = 0$ và hình tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(R): 2x - y - 2z + 8 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(0; -2; 0)$ và vuông góc với trục của hình nón chia hình nón thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 (V_1 là thể tích của hình nón chứa đỉnh I). Biết bằng biểu thức $S = V_2 + \frac{78}{V_1^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $V_1 = a$, $V_2 = b$. Khi đó tổng $a^2 + b^2$ bằng

A $52\sqrt{3}\pi^2$.

B $377\sqrt{3}$.

C 2031 .

D $2031\pi^2$.

Lời giải.

Câu 48

Trong không gian $Oxyz$, cho hình nón có đỉnh I thuộc mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z - 7 = 0$ và hình tròn đáy nằm trên mặt phẳng $(R): 2x - y - 2z + 8 = 0$. Mặt phẳng (Q) đi qua điểm $A(0; -2; 0)$ và vuông góc với trục của hình nón chia hình nón thành hai phần có thể tích lần lượt là V_1 và V_2 (V_1 là thể tích của hình nón chứa đỉnh I). Biết bằng biểu thức $S = V_2 + \frac{78}{V_1^3}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $V_1 = a$,

$V_2 = b$. Khi đó tổng $a^2 + b^2$ bằng

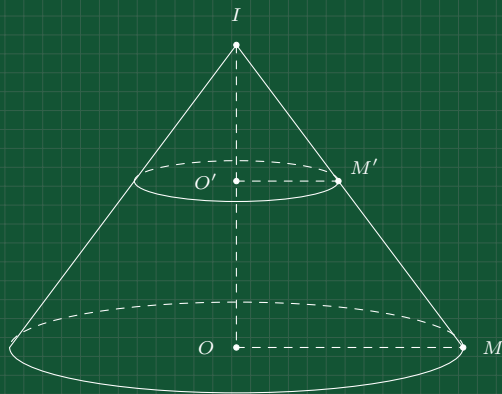
A $52\sqrt{3}\pi^2$.

B $377\sqrt{3}$.

C 2031.

D $2031\pi^2$.

Lời giải.



Để thấy $(P) \parallel (R)$, gọi O là tâm của đường tròn đáy hình nón, $O' = IO \cap (Q)$, từ giả thiết ta có:
 $IO' = d(A, (P)) = \frac{5}{3}$, $OO' = d(A, (R)) = \frac{10}{3}$ suy ra $OO' = 2IO'$.

Gọi M là điểm thuộc đường tròn (O) , $M' = IM \cap (Q)$, do $O'M' \parallel OM$ nên $\frac{IO'}{IO} = \frac{O'M'}{OM} = \frac{1}{3}$.

Do đó $r_2 = 3r_1$, (trong đó r_1 và r_2 lần lượt là bán kính của các đường tròn (O') và (O)). Đặt $IO' = h$,

khi đó $\frac{V_1}{V} = \frac{\frac{1}{3}\pi r_1^2 h}{\frac{1}{3}\pi (3r_1)^2 \cdot 3h} = \frac{1}{27} \Rightarrow V = 27V_1 \Rightarrow V_2 = V - V_1 = 26V_1$

$$S = V_2 + \frac{78}{V_1^3} = 26V_1 + \frac{78}{V_1^3} = \frac{26}{3}V_1 + \frac{26}{3}V_1 + \frac{26}{3}V_1 + \frac{78}{V_1^3} \geq 4\sqrt[4]{\frac{26}{3}V_1 \cdot \frac{26}{3}V_1 \cdot \frac{26}{3}V_1 \cdot \frac{78}{V_1^3}} = 4\sqrt[4]{\frac{456976}{9}}.$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{26}{3}V_1 = \frac{78}{V_1^3} \Leftrightarrow V_1 = \sqrt{3}$.

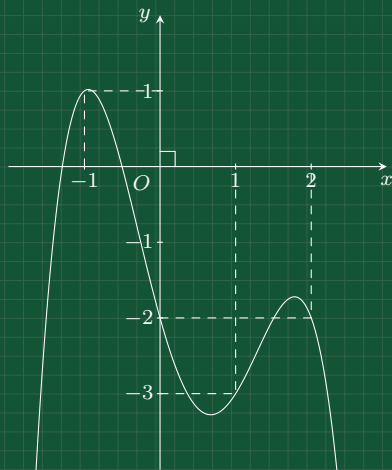
Suy ra $\begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 26\sqrt{3}. \end{cases}$

Vậy $a^2 + b^2 = 3 + 26^2 \cdot 3 = 2031$.

Câu 49

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là

- A** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
- B** 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
- C** 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
- D** 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

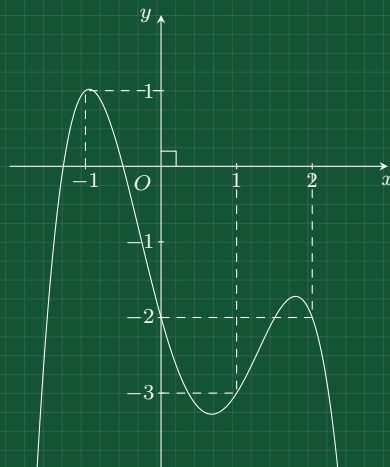


Lời giải.

Câu 49

Cho đồ thị hàm số $y = f(x)$ như hình vẽ bên. Số điểm cực đại, cực tiểu của hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ là

- A** 1 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.
B 3 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
C 2 điểm cực đại, 2 điểm cực tiểu.
D 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.



Lời giải.

Ta có $g'(x) = 2f(x) \cdot f'(x)$.

$$\text{Suy ra } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 & (1) \\ f'(x) = 0 & (2) \end{cases}$$

Dựa vào đồ thị của hàm số $y = f(x)$ ta suy ra: phương trình (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \in (-\infty; -1) \\ x = \beta \in (-1; 0) \end{cases}$.

Phương trình (2) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = x_1 \in (-1; \beta) \\ x = x_2 \in (0; 1) \\ x = x_3 \in (1; 2) \end{cases}$, trong đó x_1, x_3 là các điểm cực đại và x_2 là các điểm cực tiểu.

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	α	x_1	β	x_2	x_3	$+\infty$				
$f'(x)$	+	$\vdots$	+	0	-	$\vdots$	-	0	+	0	-
$f(x)$	-	0	+	$\vdots$	+	0	-	$\vdots$	-	$\vdots$	-
$g'(x)$	-	0	+	0	-	0	+	0	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$		CD	$\searrow$		CD	$\searrow$		CD	$+\infty$
		CT		$\swarrow$	CT		$\swarrow$	CT		$\swarrow$	

Từ bảng biến thiên trên suy ra hàm số $g(x) = [f(x)]^2$ có 2 điểm cực đại, 3 điểm cực tiểu.

Câu 50

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình $2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A 4039.

B 4038.

C 2019.

D 2017.

Lời giải.

Câu 50

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m \in [-2019; 2019]$ để phương trình $2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0$ có đúng 3 nghiệm thực phân biệt?

A 4039.**B** 4038.**C** 2019.**D** 2017.**Lời giải.**

Ta có phương trình

$$\text{Ta có } 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{mx-2m-1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + \frac{m(x-2)-1}{x-2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2019^x + \frac{2x-1}{x+1} + m - \frac{1}{x-2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1}{x-2} - 2019^x - \frac{2x-1}{x+1}.$$

$$\text{Xét hàm số } y = \frac{1}{x-2} - 2019^x - \frac{2x-1}{x+1} \Rightarrow y' = -\frac{1}{(x-2)^2} - 2019^x \ln(2019) - \frac{3}{(x+1)^2} < 0; \forall x \in$$

 $\mathbb{R} \setminus \{-1; 2\}$ Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
y'	—		—	—
y	-2	$+\infty$	$+\infty$	
				
	$-\infty$		$-\infty$	$-\infty$

Vậy để phương trình có 3 nghiệm phân biệt thì $m \in (-\infty; -2)$ mà $m \in [-2019; 2019]; m \in \mathbb{Z}$.

Vậy ta có 2017 số nguyên m cần tìm.